# Laplace integration med nedstigende differenser

Torben Brandt*
8. oktober 2016†

Keywords: Laplace integration nedstigende differenser Newtons interpolationsformel numerisk integration integral approksimation summation nedadstigende differencer

† 28. maj 2008 med rettelser til formatering i 2009 og tabel 2 i 2016

* mailto:torben@actuar.dk

Dette dokument beskriver en metode kaldet Laplace's integrationsformel med nedstigende differenser. Det er en numerisk metode til at beregne integraler ved kun at evaluere integranden i få ækvidistante punkter.

Metoden har fundet stor udbredelse blandt aktuarer, da teknisk grundlag ofte benytter denne metode til at approksimere integraler.

Vi beskriver her baggrunden og udledningen af formlen.

# 1 Notation

Vi antager at vi har en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der dog kun kan udregnes i *evalueringspunkterne* $x_0 < x_1 < ... < x_N$. Det er ikke i alle formler at alle punkterne benyttes, men det forudsættes at $N$ er stor nok til at alle benyttede punkter findes.

Det skal bemærkes at følgende alene betyder en substitution ind i funktionsudtrykket og ikke involverer stamfunktioner

$$\big[f(x)\big]_a^b = f(x)\big|_a^b = f(b) - f(a).$$

$f^{(n)}(x)$ betyder som sædvanligt den $n$'te afledte af $f$ taget i $x$.

Vi minder også om de kombinatoriske formler ($x \in \mathbb{R}$ og $n, k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= 1 \\
x^{(1)} &= x \\
x^{(n)} &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\
&= x^{(n-1)}(x-n+1) && (1) \\
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{n-k} && (2)
\end{aligned}$$

## 1.1 Nedstigende differenser

*Nedstigende differenser* kaldes på engelsk forward differences. De defineres

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\
&= \big[f(y)\big]_x^{x+1} \\
\Delta^0 f(x) &= f(x) \\
\Delta^n f(x) &= \Delta\left(\Delta^{n-1} f(x)\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Det følgende eksplicitte udtryk viser sig brugbart:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x+n-j). \tag{4}$$

## 1.2 Dividerede differenser

Den korrekte danske betegnelse er ukendt, men en oversættelser fra det engelske divided differences giver *dividerede differenser*. Vi benytter notationen

$$\begin{aligned}
f[x] &= f(x) \\
f[x_0, x_1, ..., x_n] &= \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}.
\end{aligned}$$

Det følgende eksplicitte udtryk viser sig brugbart:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\displaystyle\prod_{0 \le j \le n \,:\, j \ne i} (x_i - x_j)} \tag{5}$$

# 2 Laplace's integrationsformel

Laplace's integrationsformel findes i flere varianter. Dels med nedstigende og dels med opstigende differenser. Antallet af differenser kan også variere. Vi medtager her også kun varianten hvor afstanden mellem evalueringspunkterne er 1.

**Definition 2.1.** Laplace's integrationsformel *med $n-2$ nedstigende differenser er givet ved*

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1\big[f(x)\big]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} L_k\big[\Delta^{k-1} f(x)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \big[f(x)\big]_a^b \sum_{k=1}^{n-1} L_k(-1)^{k-1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \big[f(x+k-1)\big]_a^b \sum_{j=0}^{n-k-1} L_{k+j}(-1)^j \binom{k+j-1}{j},
\end{aligned}
$$

*hvor $L_k$ er defineret ved*

$$
L_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 x^{(k)}\,dx.
$$

*Tabellerede værdier for $L_k$ kan ses i tabel 1.*

*Hvis $f^{(n)}$ er kontinuert er fejlen i approksimationen er givet ved*

$$
(b-a)L_n f^{(n)}(\xi)
$$

*for et $\xi$ i intervallet $[a, b+n-2]$.*

# 3 Udledning

I dette afsnit udledes Laplace's integrationsformel i definition 2.1.

Man ikke umiddelbart kan opstille et integrale over $f$, da $f$ kun kan evalueres i et endeligt antal punkter, og definitionen på Riemann-integralet kræver at integranden kan evalueres i punkterne på en vilkårlig opdeling. Derfor interpoleres punkterne mellem evalueringspunkterne, og dermed kan integranden beregnes i alle punkter. Approksimationen ligger derfor i interpolationen, mens selve integrationen foregår eksakt over den approksimerede integrand.

En nyttig egenskab heraf er at det approksimerede integrale er lineær, dvs summen af integralerne over $[a, b]$ og $[b, c]$ præcis giver integralet over $[a, c]$ (hvor $a < b < c$ er evalueringspunkter for integranden).

| $k$ | $L_k$ | $L_k$ |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{60480}{60480}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{30240}{60480}$ |
| 2 | $-\frac{1}{12}$ | $-\frac{5040}{60480}$ |
| 3 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{2520}{60480}$ |
| 4 | $-\frac{19}{720}$ | $-\frac{1596}{60480}$ |
| 5 | $\frac{3}{160}$ | $\frac{1134}{60480}$ |
| 6 | $-\frac{863}{60480}$ | $-\frac{863}{60480}$ |
| 7 | $\frac{275}{24192}$ | – |
| 8 | $-\frac{33953}{3628800}$ | – |
| 9 | $\frac{8183}{1036800}$ | – |
| 10 | $-\frac{3250433}{479001600}$ | – |

Tabel 1: Laplace konstanter $L_k$

## 3.1 Interpolationsformel

Den grundlæggende formel kaldes på engelsk for Newton's divided difference interpolation formula[1]. Den bygger på at enhver kontinuert funktion kan approksimeres vilkårlig godt af polynomier (som det kendes fra Taylorudvikling af en differentiabel funktion). Som basis benyttes ikke polynomierne $1, x^2, x^3, ...$ men i stedet

$$\pi_k(x) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \prod_{j=0}^{k}(x - x_j) & k > 1 \end{cases} \tag{6}$$

Approksimationen af $f$ er så en linearkombination af sådanne polynomier. Konstanterne for $k$'te led i linearkombinationen er $f[x_0, x_1, ..., x_k]$.

**Definition 3.1.** Newton's divided difference interpolation formula *baseret på $n + 1$ punkter er givet ved*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \pi_{k-1}(x) f[x_0, x_1, ..., x_k] + R_n,$$

*hvor $\pi_k(x)$ er givet ved (6) og*

$$R_n = \pi_n(x) f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = \pi_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in [x_0, x_n].$$

Det bemærkes at selv om restleddet $R_n$ er givet, så kan det ikke umiddelbart regnes ud. I første formel indgår $f(x)$ i $f[x_0, x_1, ..., x_n, x]$, og i den anden er $\xi_x$ ikke kendt.

Intuitionen i formlen er at der konstrueres et $n$'te grads polynomium gennem punkterne $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$. Dette polynomium er unikt.

Vi antager nu at $x_0 = \mu$ og at $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = 1$ for alle $k$. Da bygger interpolationen på evalueringspunkter $\{\mu, \mu+1, ..., \mu+n\}$. Formlen bliver nu:

$$f(x) = f(\mu) + \sum_{k=1}^{n} \pi_{k-1}(x) f[\mu, \mu + 1, ..., \mu + k] + R_n, \tag{7}$$

[1]Se mere på side 3-11 i G. M. Phillips: Interpolation and approximation by polynomials

hvor

$$\begin{aligned}\pi_k(x) &= \prod_{j=0}^{k}(x-\mu-j) = (x-\mu)^{(k+1)} \\ R_n &= \pi_n(x) f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n, x].\end{aligned}$$

Inden vi går videre får vi brug for et par korte resultater.

**Lemma 3.2.** *For ethvert* $i \in \{0, 1, ..., k\}$ *gælder*

$$\prod_{0 \le j \le k\,:\,j \ne i} (i-j) = (-1)^{k-i} k! \binom{k}{k-i}^{-1}$$

*Bevis.* Vi regner på venstresiden:

$$\begin{aligned}\prod_{0\le j\le k\,:\,j\ne i}(i-j) &= \underbrace{\prod_{0\le j\le k\,:\,j<i}(i-j)}_{i!}\prod_{0\le j\le k\,:\,j>i}(i-j) \\ &= i!(-1)(-2)\cdots(i-k) \\ &= i!(-1)^{k-i}(k-i)! \\ &= (-1)^{k-i}k!\frac{i!(k-i)!}{k!} \\ &= (-1)^{k-i}k!\binom{k}{i}^{-1} \\ &= (-1)^{k-i}k!\binom{k}{k-i}^{-1}\end{aligned}$$

I sidste lighedstegn har vi benyttet (2). □

**Lemma 3.3.** *Vi har følgende specialtilfælde af den eksplicitte formel for dividerede differenser*

$$f[\mu, \mu+1, ..., \mu+k] = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{1}{k!}\binom{k}{j} f(\mu+k-j).$$

*Bevis.* Vi benytter først (5) og dernæst lemma 3.2:

$$
\begin{aligned}
f[\mu, \mu+1, ..., \mu+k] &= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(\mu+i)}{\prod\limits_{0\le j\le k\,:\,j\ne i} (\mu+i-\mu-j} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(\mu+i)}{\prod\limits_{0\le j\le k\,:\,j\ne i} (i-j)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{f(\mu+i)}{(-1)^{k-i}k!\binom{k}{k-i}^{-1}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\frac{1}{k!}\binom{k}{k-i} f(\mu+i) \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j} f(\mu+k-j).
\end{aligned}
$$

Ved sidste lighedstegn har vi ændret summationsrækkefølgen med $j = k - i$. □

Vi er nu klar til at regne videre på interpolationsformlen i (7). Vi benytter lemma 3.3 og (4):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\mu) + \sum_{k=1}^{n} (x-\mu)^{(k)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+k] + R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (x-\mu)^{(k)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+k] + R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (x-\mu)^{(k)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j}\frac{1}{k!}\binom{k}{j} f(\mu+k-j) + R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} (x-\mu)^{(k)} \frac{\Delta^k f(\mu)}{k!} + R_n, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

hvor vi stadig har restleddet

$$R_n = (x-\mu)^{(n+1)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n, x].$$

## 3.2 Integrationsformel

Vi antager stadig at $f$ kan evalueres i evalueringspunkterne $\mu, \mu+1, ..., \mu+N$ for $N$ tilstrækkelig stort.

Vi benytter nu interpolationsformlen (8) på punktet $x+\mu$. Vi benytter dog kun $n$ punkter i modsætning til de $n+1$ punkter i (8):

$$f(x+\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)} \frac{\Delta^k f(\mu)}{k!} + x^{(n)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n-1, x+\mu].$$

Vi integrerer over $x$ fra 0 til 1 og får

$$\begin{aligned}
&\int_{\mu}^{\mu+1} f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)} \frac{\Delta^k f(\mu)}{k!}\, dx + \int_0^1 x^{(n)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n-1, x+\mu]\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{(k)}\, dx\, \Delta^k f(\mu) + \int_0^1 x^{(n)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n-1, x+\mu]\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} L_k \Delta^k f(\mu) + \int_0^1 x^{(n)} f[\mu, \mu+1, ..., \mu+n-1, x+\mu]\, dx,
\end{aligned}$$

hvor vi har

$$L_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{(k)}\, dx.$$

Intuitionen i denne formel er at vi approksimerer integralet over $[\mu, \mu+1]$ ved at integrere over et $(n-1)$'te grads polynomium baseret på punkterne $\mu, \mu+1, ..., \mu+n-1$. For forskellige integraler over $[\mu+i, \mu+i+1]$ har vi forskellige integrander baseret på punkterne $\mu+i, \mu+i+1, ..., \mu+i+n-1$.

Vi lægger nu disse integraler sammen og får en formel, der er baseret på punkterne $a, a+1, ..., b+n-2$. Vi ser her bort fra restleddet:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{\mu=a}^{b-1} \int_\mu^{\mu+1} f(x)\,dx \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} \sum_{k=0}^{n-1} L_k \Delta^k f(\mu) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\mu=a}^{b-1} L_k \Delta^k f(\mu) \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} L_0 \Delta^0 f(\mu) + \sum_{\mu=a}^{b-1} L_1 \Delta f(\mu) + \sum_{k=2}^{n-1} L_k \sum_{\mu=a}^{b-1} \Delta^k f(\mu) \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1 \sum_{\mu=a}^{b-1} \left[f(x)\right]_\mu^{\mu+1} + \sum_{k=2}^{n-1} L_k \sum_{\mu=a}^{b-1} \Delta \left(\Delta^{k-1} f(\mu)\right) \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1 \sum_{\mu=a}^{b-1} \left[f(x)\right]_\mu^{\mu+1} + \sum_{k=2}^{n-1} L_k \sum_{\mu=a}^{b-1} \left[\Delta^{k-1} f(x)\right]_\mu^{\mu+1} \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1 \left[f(x)\right]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} L_k \left[\Delta^{k-1} f(x)\right]_a^b.
\end{aligned}$$

Vi har undervejs brugt (3). Det er denne version af Laplace's integrationsformel, der typisk findes symbolsk, og også den der er nævnt først i definition 2.1.

I praksis kan det dog være en fordel at samle funktionsværdierne $f(x)$ for forskellige $x$ for at mindske antallet af gange $f$ skal evalueres.

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1\big[f(x)\big]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} L_k\big[\Delta^{k-1} f(x)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1\big[f(x)\big]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} L_k \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} f(x+k-1-j)\right]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1\big[f(x)\big]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} L_k (-1)^j \binom{k-1}{j} \big[f(x+k-1-j)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_1\big[f(x)\big]_a^b + \sum_{k=2}^{n-1} L_k (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \big[f(x+k-1-k+1)\big]_a^b \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-2} L_k (-1)^j \binom{k-1}{j} \big[f(x+k-1-j)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \sum_{k=1}^{n-1} L_k (-1)^{k-1} \big[f(x)\big]_a^b \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} L_{k+j} (-1)^j \binom{k+j-1}{j} \big[f(x+k+j-1-j)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \big[f(x)\big]_a^b \sum_{k=1}^{n-1} L_k (-1)^{k-1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \big[f(x+k-1)\big]_a^b \sum_{j=0}^{n-k-1} L_{k+j} (-1)^j \binom{k+j-1}{j}.
\end{aligned}
$$

Denne formel er den anden i definition 2.1.

# 4 Eksempler

**Eksempel 4.1.** *Vi finder her et udtryk for Laplace's integrationsformel med nedstigende differenser for $n = 2$. Det giver os de to første led fra definition 2.1:*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \big[f(x)\big]_a^b \sum_{k=1}^{1} L_k(-1)^{k-1} \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + L_k\big[f(x)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \frac{1}{2}\big[f(x)\big]_a^b \\
&= \frac{1}{2}f(a) + \sum_{\mu=a+1}^{b-1} f(\mu) + \frac{1}{2}f(b).
\end{aligned}$$

*Dette udtryk genkendes som approksimationen vha. trapezsummer, hvilket også svarer til at vi har approksimeret integranden med et førstegrads $(n-1)$ polynomium over hvert interval $[a+i, a+i+1]$.*

**Eksempel 4.2.** *Vi finder her et udtryk for Laplace's integrationsformel med 5 ($n = 7$) nedstigende differenser. Definition 2.1 giver:*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \big[f(x)\big]_a^b \sum_{k=1}^{6} L_k(-1)^{k-1} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{6} \big[f(x+k-1)\big]_a^b \sum_{j=0}^{6-k} L_{k+j}(-1)^j \binom{k+j-1}{j} \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \big[f(x)\big]_a^b (L_1 - L_2 + L_3 - L_4 + L_5 - L_6) \\
&\quad + \big[f(x+1)\big]_a^b \left( L_2\binom{1}{0} - L_3\binom{2}{1} + L_4\binom{3}{2} - L_5\binom{4}{3} + L_6\binom{5}{4} \right) \\
&\quad + \big[f(x+2)\big]_a^b \left( L_3\binom{2}{0} - L_4\binom{3}{1} + L_5\binom{4}{2} - L_6\binom{5}{3} \right) \\
&\quad + \big[f(x+3)\big]_a^b \left( L_4\binom{3}{0} - L_5\binom{4}{1} + L_6\binom{5}{2} \right) \\
&\quad + \big[f(x+4)\big]_a^b \left( L_5\binom{4}{0} - L_6\binom{5}{1} \right) \\
&\quad + \big[f(x+5)\big]_a^b L_6\binom{5}{0} \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \sum_{k=0}^{5} K_{7,k}\big[f(x+k)\big]_a^b \\
&= \sum_{\mu=a}^{b-1} f(\mu) + \sum_{k=0}^{5} K_{7,k} f(b+k) - \sum_{k=0}^{5} K_{7,k} f(a+k).
\end{aligned}$$

*Tabellerede værdier for $K_{7,k}$ kan ses i tabel 2. Bemærk at $K$-konstanterne afhænger af $n$.*

| $k$ | $K_{7,k}$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{41393}{60480}$ |
| 1 | $-\frac{23719}{60480}$ |
| 2 | $\frac{22742}{60480}$ |
| 3 | $-\frac{14762}{60480}$ |
| 4 | $\frac{5449}{60480}$ |
| 5 | $-\frac{863}{60480}$ |

Tabel 2: Aggregerede Laplace konstanter $K_{7,k}$

# 5 Referencer

William Simonsen:
Numerisk analyse: interpolationsregning
1971
Kapitel 8

George McArtney Phillips:
Interpolation and approximation by polynomials
2003
Springer
Side 3-11